23/04/2018

▶ Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra β' είδους

$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, y(s)\, ds \quad , \; t,s \in [a,b]$$

και f συνεχής στο $[a,b]$ και k συνεχής στο $[a,b]\times[a,b]$.

Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων: (Picard)

Ορίζουμε επαγωγικά μια ακολουθία (y_n) ως εξής:

θέτουμε $y_0(t) = f(t)$, $t\in[a,b]$

$$y_1(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, y_0(s)\, ds \quad , t\in[a,b].$$

$$y_2(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, y_1(s)\, ds \quad , t\in[a,b]$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\, y_{n-1}(s)\, ds \quad , t\in[a,b].$$

Η y_0 είναι συνεχής στο $[a,b]$ διότι $y_0(t) = f(t)$ και f συνεχής στο $[a,b]$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι κάθε y_n είναι συνεχής στο $[a,b]$ (επειδή k συνεχής και f συνεχής).

Θ.δ.ο η ακολουθία (y_n) συγκλίνει σε μια συνεχή συνάρτηση. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $[a,b]$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ και (M_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $M_n \geq 0$ $\forall n$ και τέτοια ώστε

$|f_n(t)| \le M_n$ $\forall t\in[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι f συνεχής στο $[a,b]$ άρα $\exists M$ τέτοιο ώστε $|f(t)| \le M \quad \forall t \in [a,b]$

Επιπλέον k συνεχής στο συμπαγές $[a,b]\times[a,b]$ άρα $\exists$ σταθερά N τέτοια ώστε $|k(t,s)| \le N \quad \forall t,s \in [a,b]$

Έχουμε:

$$|y_1(t) - y_0(t)| = \left|f(t) + \int_a^b k(t,s)\, y_0(s)\, ds - f(t)\right|$$

$$= \int_a^t |k(t,s)|\,|y_0(s)|\, ds \le \int_a^t N|f(s)|\, ds \le \int_a^t N\cdot M\, ds = N M (t-a) \le N M (b-a)$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι: $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le N\cdot M^n \cdot \dfrac{(b-a)^n}{n!}$

Όμως: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N M^n (b-a)^n}{n!} = N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M(b-a))^n}{n!} =$$

$$= N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M(b-a))^n}{n!} - 1 \right) = N\left(e^{M(b-a)} - 1\right)$$

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ προς μια συνάρτηση u.

Έστω $f_n(t) = y_n(t) - y_{n-1}(t)$

επειδή: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ συγκλίνει

η ακολουθία μερικών αθροισμάτων έχει όριο

Έχουμε όμως

$$\sigma_n(t) = \cancel{y_1(t)} - y_0(t) + y_2(t) - \cancel{y_1(t)} + \dots + y_n(t) - y_{n-1}(t) =$$

$$= y_n(t) - y_0(t)$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_n \sigma_n(t) = u(t)$ ομοιόμορφα, $t \in [a,b]$

οπότε:

$$\lim_n y_n(t) = \lim_n \left(y_n(t) - y_0(t) + y_0(t)\right) = u(t) + y_0(t) =: y(t)$$

ομοιόμορφα για $t \in [a,b]$

Η y θα είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων (των y_n)

Επιπλέον εφόσον $y_n \to y$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ έπεται ότι:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) : \forall n \ge n_0 \Rightarrow |y_n(s) - y(s)| < \varepsilon \quad \forall s \in [a,b].$$

Εφόσον k είναι συνεχής και $|k(t,s)| \le N \quad \forall t,s$

οπότε, έχουμε

$$|k(t,s)\, y_n(s) - k(t,s)\, y(s)| = |k(t,s)|\,|y_n(s) - y(s)| \le N\,|y_n(s) - y(s)|$$

Δηλαδή: $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon))$ τέτοιο ώστε $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$

$$|k(t,s)\, y_n(s) - k(t,s)\, y(s)| < \varepsilon \quad \forall s \in [a,b]$$

άρα η ακολουθία $(k(t,\cdot)\, y_n(\cdot))_n$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς την $k(t,\cdot)\,y(\cdot)$

άρα

$$\int_a^t k(t,s)\, y_n(s)\,ds \to \int_a^t k(t,s)\, y(s)\,ds.$$

οπότε από την σχέση $y_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) \cdot y_{n-1}(s)\,ds$

παίρνοντας όριο ως προς $n \to \infty$ έχουμε ότι:

$$y(t) = f(t) = \int_a^t k(t,s)\,y(s)\,ds.$$

Άρα y λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Αποδεικνύεται ότι η λύση είναι μοναδική με χρήση του παρακάτω λήμματος.

ΛΗΜΜΑ: Έστω $f,g : [a,b] \to [0,+\infty)$ συνεχείς και C ένας μη αρνητικός αριθμός. Εάν ισχύει ότι $f(t) \le C + \int_a^t g(s) f(s)\,ds, \quad a \le t \le b$ (*)

τότε ισχύει:

$$f(t) \le C \cdot \exp \int_a^t g(s)\,ds$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΛΗΜΜΑΤΟΣ:

Υποθέτουμε ότι $C>0$ τότε εφόσον $f(t) \ge 0$ και $g(t) \ge 0$

οπότε έχουμε $C + \int_a^t g(s) f(s)\,ds > 0$ τότε διαιρώντας και τα

2 μέλη της (*) με $C + \int_a^t g(s) f(s)\,ds$

έχουμε:

Scanned by CamScanner

$$\frac{f(t)}{c+\int_a^t g(s)f(s)ds} \leq 1$$

Πολλαπλασιάζω και τα 2 μέλη της ανισότητας με $g(t) \geq 0$:

$$\frac{f(t)\,g(t)}{c+\int_a^t g(s)f(s)\,ds} \leq g(t)$$

ολοκληρώνοντας από το a έως το t έχουμε:

$$\int_a^t \frac{f(s)\,g(s)}{c+\int_a^s g(w)f(w)\,dw}\,ds \leq \int_a^t g(s)\,ds.$$

άρα: $\ln\left(c+\int_a^s g(w)\,f(w)\,dw\right) - \ln c \leq \int_a^t g(s)\,ds$

$$\ln\frac{\left(c+\int_a^t g(w)f(w)\,dw\right)}{c} \leq \int_a^t g(s)\,ds \quad \text{ή}$$

$$f(t) \leq c+\int_a^t g(w)f(w)\,dw \leq c\cdot e^{\left(\int_a^t g(s)\,ds\right)}$$

Άρα $f(t) \leq c\cdot \exp\left(\left(\int_a^t g(s)\,ds\right)\right)$

Εάν $c=0$ τότε $f(t) \leq 0+\int_a^t g(s)f(s)\,ds < u+\int_a^t g(s)f(s)\,ds$, όπου $u>0$ τυχαίο

$$f(t) \leq u\exp\left[\left(\int_a^t g(s)\,ds\right)\right]$$

παίρνοντας $u \to 0^+$ έχουμε το ζητούμενο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ)

Έστω y, z λύσεις της ο.ε τότε:

$$y(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\,y(s)\,ds$$

$$z(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)\,z(s)\,ds.$$

ολοκληρώνοντας κατά μέλη:

$$y(t)-z(t)=\int_a^t k(t,s)\,[y(s)-z(s)]\,ds$$

Άρα: $|y(t)-z(t)| \leq \int_a^t |k(t,s)|\,|y(s)-z(s)|\,ds \leq \int_a^t N|y(s)-z(s)|\,ds$

Οπότε: $|y(t)-z(t)| \leq 0+\int_a^t N|y(s)-z(s)|\,ds.$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα:

$I(t)=|y(t)-z(t)|$, I συνεχής

$c=0$

Έχουμε: $I(t)\leq c\cdot \exp\left(\int_a^t N\,ds\right)=0\cdot e^{N(t-a)}=0.$

Άρα: $|y(t)-z(t)|=0$ $\forall t\in[a,b]$ άρα $y(t)=z(t)$ άρα μοναδική η λύση.

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί η ο.ε Volterra

$$u(t)=t+\int_a^t (s-t)\,u(s)\,ds. \quad ,t\in[a,b] \quad ,b>0.$$

ΛΥΣΗ:

α' τρόπος: Αρχικά με χρήση μετασχηματισμού Laplace.

$$u(t)=t+\int_0^t (s-t)\,u(s)\,ds$$

Έστω $L\{u(t)\}=U(s)$, τότε:

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\mathcal{L}\{t\}+\mathcal{L}\left\{\int_0^t (s-t)\,u(s)\,ds\right\}$$

$$U(s)=\frac{1}{s^2}+\mathcal{L}\{-t\}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\}$$

εάν $f(t)=-t$

$\int_0^t -(t-s)u(s)ds=$

$=f(t)*u(t)$

$$U(s)=\frac{1}{s^2}+\left(\frac{-1}{s^2}\right)U(s)$$

$$U(s)+\frac{1}{s^2}U(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\frac{(s^2+1)}{s^2}U(s)=\frac{1}{s^2} \quad \text{άρα} \quad U(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

Οπότε: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.$

β' τρόπος: (μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων Picard)

$u_0(t) = f(t) = t$

$u_n(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^t k(t,s)\, u_{n-1}(s)\,ds$

Οπότε: $u_1(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^t k(t,s)\,u_0(s)\,ds = t + \int_0^t (s-t)\,s\,ds = t + \int_0^t (s^2 - ts)\,ds =$

$= t + \displaystyle\int_0^t \left(\frac{s^3}{3} - t\cdot\frac{s^2}{2}\right)' ds = t - \frac{t^3}{3!}$

$u_2(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^t k(t,s)\,u_1(s)\,ds = t + \int_0^t (s-t)\left(s - \frac{s^3}{3!}\right)ds = t + \int_0^t \left[t\left(s - \frac{s^3}{3!}\right) - s\left(s - \frac{s^3}{3!}\right)\right] ds \overset{\cdots}{=} t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι:

$$u_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Άρα: $u(t) = \lim\limits_n u_n(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t.$

Υπενθύμιση:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$

ΑΣΚΗΣΗ: Να λυθεί η ο.ε $u(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t u(s)\,ds$, $t \in [0,b]$, $b>0$.

ΛΥΣΗ:

(α' τρόπος): μετασχηματισμός Laplace.

Έστω $\mathcal{L}\{u(t)\} = X(s)$

τότε: $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t u(s)\,ds\right\}$

αλλά έστι $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

οπότε:

$$x(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}x(s)$$

$$(\Leftrightarrow)\ \left(1-\frac{1}{s}\right)x(s)=\frac{1}{s}\ (\Leftrightarrow)\ \frac{s-1}{s}x(s)=\frac{1}{s}\ (\Leftrightarrow)\ x(s)=\frac{1}{s-1},\ s>1.$$

οπότε: $u(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$

(β' τρόπος) (μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων Picard)

$$u(t)=1+\int_0^t u(s)\,ds$$

ορίζουμε $u_0(t)=f(t)=1$

$$u_1(t)=f(t)+\int_0^t \overset{1}{\overset{\|}{K(t,s)}}\cdot \overset{1}{\overset{\|}{u_0(s)}}\,ds = 1+t$$

$$u_2(t)=f(t)+\int_0^t u_1(s)\,ds = 1+\int_0^t (1+s)\,ds = 1+t+\frac{t^2}{2}$$

$$u_3(t)=1+\int_0^t\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι:

$$u_n(t)=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$$

άρα: $u(t)=\lim_n u_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=e^t$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για τις ο.ε της μορφής:

$u(t)=f(t)+\int_0^t K(t-s)u(s)\,ds$ (δηλαδή ο πυρήνας εξαρτάται από τη διαφορά $(t-s)$)

μπορούμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace και το θεώρημα της συνέλιξης.

- Εργαζόμαστε γενικά ως εξής:

Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ και $\mathcal{L}\{u(t)\}=U(s)$

τότε

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t k(t-s)\,u(s)\,ds\right\}$$

$(\Rightarrow)$ $U(s)=F(s)+\mathcal{L}\{k(t)*u(t)\}$ $(\Rightarrow)$ $U(s)=F(s)+\mathcal{L}\{k(t)\}\cdot\mathcal{L}\{u(t)\}$

$(\Rightarrow)$ $U(s)=F(s)+\mathcal{L}\{k(t)\}\cdot U(s)$

$$\left(1-\mathcal{L}\{k(t)\}\right)U(s)=F(s).$$

Μέθοδος Επαναληπτικών Πυρήνων:

Έστω ότι έχουμε την ο.ε. $y(t)=f(t)+\int_a^t k(t,s)\,y(s)\,ds$

όπου f, k συνεχείς

ορίζουμε μια ακολουθία:

$$y_0(t)=f(t)$$

$$y_1(t)=f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds.$$

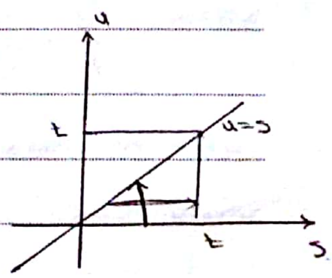
$$y_2(t)=f(t)+\int_a^t k(t,s)\,y_1(s)\,ds = f(t)+\int_a^t k(t,s)\left[f(s)+\int_a^s k(s,u)\,f(u)\,du\right]ds.$$

$$= f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds+\int_a^t k(t,s)\int_a^s k(s,u)\,f(u)\,du\,ds =$$

$$= f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds+\int_a^t\int_a^s k(t,s)\,k(s,u)\,f(u)\,du\,ds =$$

$$= f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds+\int_a^t\int_u^t k(t,s)\,k(s,u)\,ds\,du =$$

$$= f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds+\int_a^t f(u).\underbrace{\int_u^t k(t,s)\,k(s,u)\,ds\,du}_{k_2(t,u)}$$



όποτε:

$$y_2(t)=f(t)+\int_a^t k(t,s)\,f(s)\,ds+\int_a^t k_2(t,u)\,f(u)\,du.$$

Επαγωγικά:

$$y_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s) f(s)\,ds + \int_a^t k_2(t,u) f(u)\,du +$$

$$+ \int_a^t k_3(t,u) f(u)\,du + \dots + \int_a^t k_n(t,u) f(u)\,du = f(t) + \int_a^t \left(\sum_{i=1}^{n} k_i(t,u) f(u)\,du \right)$$

όπου $k_1(t,s) = k(t,s)$ και $k_n(t,s) = \int_s^t k(t,u) k_{n-1}(u,s)\,ds$, $n = 2,3$

Εφόσον k συνεχής για $a \le s \le t \le b$ έπεται ότι $\exists\, M > 0$ τέτοιο ώστε:

$|k(t,s)| \le M$, $a \le s \le t \le b$.

οπότε από την αναδρομική σχέση έχουμε:

$$|k_2(t,s)| = \left| \int_s^t k(t,u) k(u,s)\,ds \right| \le \int_s^t |k(t,u)| \cdot |k(u,s)|\,ds$$

$$\le \int_s^t M \cdot M\,ds = M^2 (t-s)$$

Επίσης $|k_3(t,s)| \le \int_s^t |k(t,u)| \cdot |k_2(u,s)|\,du \le \int_s^t M M^2 (u-s)\,du = \dots$

$$= \frac{M^3 (t-s)^2}{2}$$

Επαγωγικά έχουμε:

$$|k_n(t,s)| \le \frac{M^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Αλλά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1} (t-s)^k}{k!} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[M(t-s)]^k}{k!} = M e^{M(t-s)}$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη για $a \le s \le t \le b$

οπότε και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $a \le s \le t \le b$

Έστω $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s) = \tilde{k}(t,s)$

τότε $\displaystyle y_n(t) = f(t) + \int_a^t \left(\sum_{i=1}^{n} k_i(t,s) \right) f(s)\,ds$

άρα, παίρνοντας όριο ως προς n:

$$y(t) = \lim_{n} y_n(t) = f(t) + \int_0^t \tilde{K}(t,s) f(s)\, ds.$$

Άσκηση: Να λύσετε την Ο.Ε

$$y(t) = t + \int_0^t (s-t)\, y(s)\, ds, \quad t \in [0,b],\ b>0$$

με τη μέθοδο των επαναληπτικών πυρήνων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$k_1(t,s) = s - t$$

τότε

$$k_2(t,s) = \int_s^t k(t,\xi)\, k_1(\xi,s)\, d\xi = \int_s^t (\xi - t)(s-\xi)\, d\xi = \int_s^t (\xi s - \xi^2 - ts + t\xi)\, d\xi =$$

$$= \dots = -\frac{1}{3!}(s-t)^3$$

κάνοντας πράξεις.

$$k_3(t,s) = \int_s^t k(t,\xi)\, k_2(\xi,s)\, d\xi = -\frac{1}{6}\int_s^t (\xi-t)(s-\xi)^3\, d\xi = \dots = \frac{(s-t)^5}{5!}$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ: $\boxed{30/04/2018}$

$$k_4(t,s) = \int_s^t k(t,\xi)\, k_3(\xi,s)\, d\xi = \int_s^t (\xi - t)\frac{(\xi-t)^5}{5!}\, d\xi = \frac{1}{5!}\int_s^t (\xi - t)\left[-\frac{(s-\xi)^6}{6}\right]' d\xi$$